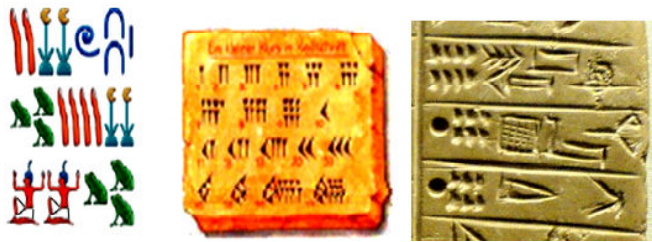


## БОЛЬШИЕ И ДЛИННЫЕ ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

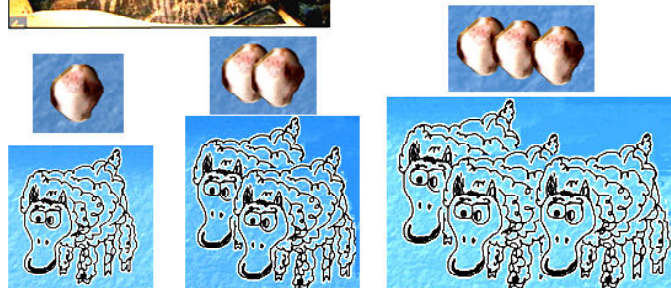
Сколько символов нужно, чтобы  
представить большое число?



Древние Египет и Вавилон



Древний пастух  
и единичная  
система  
счисления



## Арифметика единичной системы

- Складывать легко:  $111+1111=111111$

- Умножать тоже нетрудно, например, так можно три умножить на четыре

x	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

- Но! Чтобы записать число атомов во Вселенной понадобилось бы использовать сами эти атомы для записи их числа!

## РИМСКАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

- В Римской системе счисления дела уже лучше. В ней числам пять, десять, пятьдесят, сто, пятьсот, тысяча уже сопоставляются отдельные символы, которые дополняются справа или слева, обозначая добавление или вычитание. Однако, вообще говоря, требуется неограниченное число цифр.
- Сколько символов нужно для записи 444? (CDXLIV)
- Сколько символов нужно для записи 555? (DLV)
- Сколько символов нужно для записи 666? (DCLXVI)
- Сколько символов нужно для записи 777? (DCCLXXVII)
- Сколько символов нужно для записи 888? (DCCCLXXXVIII)
- Сколько символов нужно для записи 999? (CMXCIX)
- Сколько символов нужно для записи 1000? (M)
- Сколько символов нужно для записи 10000? (MMMMMMMMMM)

(скрипт для перевода в Римскую систему счисления и обратно)

[http://www.ipos.spb.ru/iuik2/MATH\\_XXI-10/Modules/M\\_1.1/M\\_1.1-numbers.html](http://www.ipos.spb.ru/iuik2/MATH_XXI-10/Modules/M_1.1/M_1.1-numbers.html)

## ПОПРОБУЕМ УМЕНЬШИТЬ ЧИСЛО ЦИФР ЗАСЧЁТ УЧЁТА ИХ ПОЛОЖЕНИЯ В ЗАПИСИ ЧИСЛА

CD XL IV	ab ab ab	1 – a
D L V	b b b	2 – aa
DC LX VI	ba ba ba	3 – aaa
DCC LXX VII	baa baa baa	4 – ab
DCCC LXXX VIII	baaa baaa baaa	5 – b
CM XC IX	ac ac ac	6 – ba
		7 – baa
		8 – baaa
		9 – ac
		10 – c

Закодируем группы символов

### Позиционная система счисления

- Что означает запись 297368?
- Это число:  
 $2 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 8$
- Что означает десятичная запись  
 $N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$  ?
- Это число:  
 $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$   
 $a_n \neq 0; 0 \leq a_i < 10$

### p-ичная система счисления

- p-ичная запись  
 $N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$  ?
- Это число:  
 $a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p^1 + a_0 \cdot p^0$   
 $a_n \neq 0; 0 \leq a_i < p$

### ТАБЛИЦЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

- Мы владеем алгоритмами работы с записями чисел в десятичной системе счисления на уровне навыков, то есть выполняем их, не думая
- Выделим эти алгоритмы.  
 Но сначала надо заново выучить таблицу умножения.

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

$*_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

## Алгоритм сложения

В десятичной системе      В четверичной системе

$$\begin{array}{r} + 99796 \\ \underline{297} \\ 100093 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 33132 \\ \underline{232} \\ 100031 \end{array}$$

$s:=0$  (перенос разряда)  
 ЦИКЛ ПО  $i$  от 0 до  $n$   
 $c_i:=a_i+b_i+s \bmod p$   
 $s:=a_i+b_i+s \operatorname{div} p$   
 КЦ  
 ЕСЛИ  $s \neq 0$  ТО  $c_{n+1}:=s$

## Алгоритм умножения на цифру

В десятичной системе      В четверичной системе

$$\begin{array}{r} * 99796 \\ \underline{7} \\ 100572 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} * 33132 \\ \underline{2} \\ 132330 \end{array}$$

$s:=0$  (перенос разряда)  
 ЦИКЛ ПО  $i$  от 0 до  $n$   
 $c_i:=a_i*b_k+s \bmod p$   
 $s:=a_i*b_k+s \operatorname{div} p$   
 КЦ  
 ЕСЛИ  $s \neq 0$  ТО  $c_{n+1}:=s$

## Умножение на $p^k$

В десятичной системе      В четверичной системе

$$\begin{array}{r} * 99796 \\ \underline{100} \\ 9979600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} * 33132 \\ \underline{100} \\ 3313200 \end{array}$$

ЦИКЛ ПО  $i$  от 0 до  $n$   
 $c_{i+k}:=a_i$   
 КЦ  
 ЦИКЛ ПО  $i$  от 0 до  $k-1$   
 $c_i:=0$   
 КЦ

## Умножение длинных чисел

- Сводится к трём описанным алгоритмам:

**c:=0**

**ЦИКЛ ПО k от 0 до n**

**c:=c+a\*b<sub>k</sub>\*p<sup>k</sup>**

**КЦ**

## Первый алгоритм перехода к новому основанию – схема Горнера

$$N_p = a_n * p^n + a_{n-1} * p^{n-1} + \dots + a_1 * p^1 + a_0 * p^0 =$$

$$= (\dots (a_n * p + a_{n-1}) * p + \dots + a_1) * p + a_0 =$$

умножения и сложения делаем в q-ичной системе

$$= b_m * q^m + b_{m-1} * q^{m-1} + \dots + b_1 * q^1 + b_0 * q^0 = N_q$$

$N_p$ :	$a_n$	$a_{n-1}$	...	$a_{k-1}$	$a_k$	...	$a_0$
	$a_n$	$a_n * p + a_{n-1}$	...	S	$S * p + a_k$	...	$N_q$

Пример: умножаем и складываем в четверичной системе

$N_3 = (12102)_3$	1	2	1	0	2		
	1	11	100	300	2102	$N_4 = (2102)_4$	

## Второй алгоритм перехода к новому основанию – делением

$$N_p = a_n * p^n + a_{n-1} * p^{n-1} + \dots + a_1 * p^1 + a_0 * p^0 =$$

$$= (\dots (a_n * p + a_{n-1}) * p + \dots + a_1) * p + a_0 =$$

$$= b_m * q^m + b_{m-1} * q^{m-1} + \dots + b_1 * q^1 + b_0 * q^0 = N_q$$

**ЦИКЛ ПОКА  $N \neq 0$**

**очередная цифра с конца :=  $N \bmod q$**

**$N := N \operatorname{div} q$**

**КЦ**

деления делаем в p-ичной системе

Пример решения той же задачи другим алгоритмом

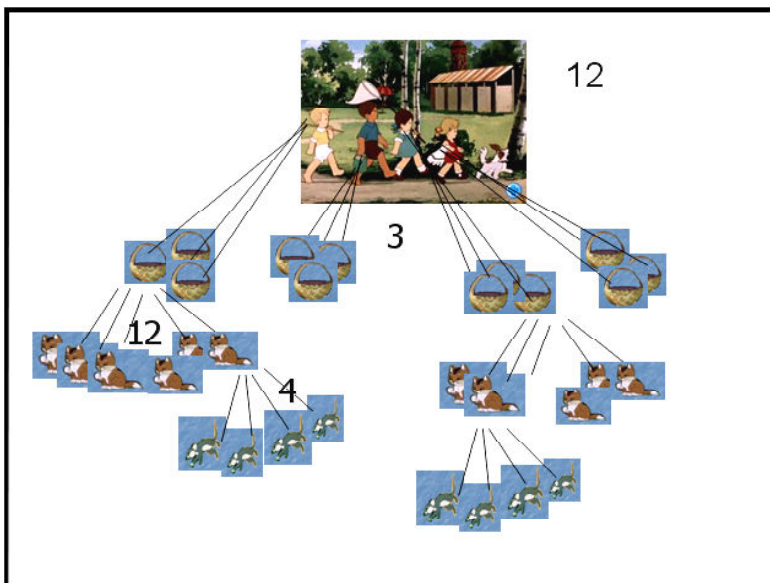
$$\begin{array}{r}
 12102 \mid \underline{11} \\
 \underline{11} \quad 1100 \mid \underline{11} \\
 11 \quad \underline{11} \quad 100 \mid \underline{11} \\
 \underline{11} \quad \quad 0 \quad \underline{22} \quad 2 \mid \underline{11} \\
 \quad \quad \quad 2 \quad \quad \quad 1 \quad \underline{0} \quad 0 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 2
 \end{array}$$

Смешанная система счисления  
 "Шел Кондрат в Ленинград..." Загадка

Шел Кондрат  
 В Ленинград,  
 А навстречу — двенадцать ребят.  
 У каждого по три лукошка,  
 В каждом лукошке — кошка,  
 У каждой кошки — двенадцать котят.  
 У каждого котенка  
 В зубах по четыре мышонка.  
 И задумался Кондрат:  
 "Сколько мышат и котят  
 Ребята несут в Ленинград?"



(Глупый, глупый Кондрат!  
 Он один и шагал в Ленинград.  
 А ребята с лукошками,  
 С мышами и кошками  
 Шли навстречу ему —  
 В Кострому.)



### В котором лукошке какого ребёнка и в зубах какого котёнка находится 137 мышонок?

- $137 = R \cdot 3 \cdot 12^4 + L \cdot 12^4 + K \cdot 4 + M$
- $137 = (R \cdot 3 \cdot 12 + L \cdot 12 + K) \cdot 4 + M$  откуда
- $M = 137 \bmod 4 = 1$ ;  $R \cdot 3 \cdot 12 + L \cdot 12 + K = 137 \operatorname{div} 4 = 34$
- $34 = (R \cdot 3 + L) \cdot 12 + K$  откуда
- $K = 34 \bmod 12 = 10$ ;  $R \cdot 3 + L = 34 \operatorname{div} 12 = 2$
- $2 = R \cdot 3 + L$  откуда  $L = 2$  и  $R = 0$

Это означает, что это первый (M) мышонок в зубах одиннадцатого котёнка (K+1), сидящего в третьем лукошке (L+1) первого (R+1) ребенка.

### Перечисление перестановок

- Как пронумеровать перестановки, идущие в лексикографическом порядке?
- 12345678
- 12345687
- 12345768
- 12345786
- 12345867
- 12345876
- 12346578
- ...
- Каков алгоритм построения следующей перестановки?
- Найти самый длинный «хвост» перестановки, цифры которого идут в порядке убывания.
- Поменять цифру, стоящую непосредственно перед «хвостом» с последней цифрой «хвоста».
- Переписать цифры «хвоста» в порядке возрастания.

### Факториальная система счисления

- Найдем, какой по счёту идёт перестановка 54638172
- До неё стоят все перестановки, начинающиеся с 1, 2, 3, 4: их  $4 \cdot 7!$  (факториал).
- Далее идут перестановки, начинающиеся с 5, на втором месте которых стоят цифры 1, 2 или 3 – их  $3 \cdot 6!$ , затем перестановки, которые начинаются с цифр 54, а за ними одна из цифр 1, 2, 3 (4 и 5 уже не могут использоваться) и т.д. (последняя цифра определяется автоматически).
- Теперь можно сказать, что до данной перестановки стоят  $4 \cdot 7! + 3 \cdot 6! + 3 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 3 \cdot 3! + 0 \cdot 2! + 1 \cdot 1!$  перестановок.
- Значит номер данной перестановки на 1 больше, либо равен этому числу, если нумеровать с нуля.
- Эта запись подсказывает идею факториальной системы счисления.



Наши авторы, 2013.  
Our authors, 2013.

*Поздняков Сергей Николаевич,  
доктор педагогических наук,  
профессор кафедры ВМ-2  
СПбГЭТУ «ЛЭТИ».*